Teoretická část - 10.1.2022

1. (a) Definujte Gâteauxovu derivaci ve směru, Gâteauxovu derivaci a Fréchetovu derivaci $(2,5$ bodu).
   (b) Zfromulujte a dokažte základní lemma variačního počtu (3 body).
   (c) Uvažte následující množiny

   $$H_1 = \{h \in C^1([-2,1]) : h(-2) = h(-1) = h(0) = h(1) = 0\},$$

   $$H_2 = \{h \in C^1([-2,1]) : h(q) = 0, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}.$$

   Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro funkci $f \in C([-2,1])$.

   i. Pokud platí
   $$\int_{-2}^{1} fg = 0, \quad g \in H_1,$$
   potom $f = 0$ na $[-2,1]$.

   ii. Pokud platí
   $$\int_{-2}^{1} fg = 0, \quad g \in H_2,$$
   potom $f = 0$ na $[-2,1]$.

   (1 bod)

   (d) Uvažujme Banachův prostor $(X, ||\cdot||)$ a na něm funkcionál F mající v bodě $x \in X$ Fréchetovu derivaci L. Dokažte, že F má v bodě x Gâteauxovu derivaci a že tato je rovněž rovna L $(1,5$ bodu).

2. (a) Definujte Lebesgueovsky měřitelnou množinu, Lebesgueovu míru, σ-algebru a míru (3 body).

   (b) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro dva měřitelné prostory (X, Σ) a (X, Γ).

      i. $(X, \Sigma \cup \Gamma)$ je měřitelný prostor.

      ii. $(X, \Sigma \cap \Gamma)$ je měřitelný prostor.

      Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu).

   (c) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro dvě míry μ a ν na stejném měřitelném prostoru (X, Σ).

      i. Zobrazení $A \mapsto \mu(A) + \nu(A)$, $A \in \Sigma$, je míra na (X, Σ).

      ii. Zobrazení $A \mapsto \mu(A) \cdot \nu(A)$, $A \in \Sigma$, (s konvencí $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$) je míra na (X, Σ).

      Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu).

   (d) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení (fakt, že $(\mathbb{R}, \lambda_1, \Lambda_1)$ je prostor s mírou, dokazovat nemusíte).

      i. Zobrazení $A \mapsto \lambda_1(A \cap [-1, 1])$, $A \in \Lambda_1$, je míra na $(\mathbb{R}, \Lambda_1)$.

      ii. Zobrazení $A \mapsto \lambda_1(A \cup [-1, 1])$, $A \in \Lambda_1$, je míra na $(\mathbb{R}, \Lambda_1)$.

      Vše řádně zdůvodněte (1 bod).

3. (a) Definujte křivku, regulární křivku a opačnou křivku. Definujte křivkový integrál 1. a 2. druhu (4 body).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o výpočtu křivkového integrálu 2. druhu pomocí potenciálu (2 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, a zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x^2, y^2)$.

      i. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, že
      $$\int_{\langle\gamma\rangle} f\ ds < \int_{\langle\ominus\gamma\rangle} f\ ds.$$

      ii. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, že
      $$\int_{\langle\gamma\rangle} f\ ds = \int_{\langle\ominus\gamma\rangle} f\ ds.$$

      iii. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, že
      $$\int_{\langle\gamma\rangle} F \cdot \overrightarrow{ds} < \int_{\langle\ominus\gamma\rangle} F \cdot \overrightarrow{ds}.$$

      iv. Existuje regulární C^1 křivka $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, že
      $$\int_{\langle\gamma\rangle} F \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\langle\ominus\gamma\rangle} F \cdot \overrightarrow{ds}.$$

   (2 body)